凸多面体の交叉ホモロジー群(凸多面体の離散構造の現代的諸相)

石田, 正典

数理解析研究所講究録
第857巻 1994年 113-122

凸多面体の交叉ホモロジー群

東北大学理学部　　石田正典

(Masanori Ishida)

序文

交叉ホモロジー論は、特異点を持った複素解析空間や代数多様体に有効な理論で多くの重要な定理が知られている。トーリック多様体は代数多様体あるからこれらの定理を適用することができる。

一方、トーリック多様体は扇と呼ばれる錐体の集まりで記述できるので、これらの定理の主張も錐体によって表現できる。

研究集会ではトーリック多様体の交叉ホモロジー群が、対応する扇に含まれる錐体の生成する線形空間を集まりを使って得られた外積代数上の次数付き加群の複体によって表現されることを話した。

講演の中で交叉ホモロジー論の一般論である強レフシェッツ型定理や分解定理から得られるだろうと思われる予想を述べたが、その後これら（対角線定理I,II）が一般論を用いずに直接代数的に証明できることがわかったので、それもここに述べる。それは一般論の分解定理に相当する結果を扇の重心細分に対して示すことにより得られる。

スタンレーは単体的凸多面体の面に関する上限予想を代数幾何学の重要な定理である強レフシェッツ定理をトーリック多様体に適用することにより証明した[S1]。対角線定理IIはこの証明における強レフシェッツ定理を不要にしている。

またスタンレーが定義した一般化された h ベクトルとトーリック多様体の middle perversity に対する交叉ホモロジー群の次元との関係 [S2, Thm.3.1] についても最も簡単な別証明を与えたことになる。

ここでの議論の特徴は、トーリック多様体は一切持ち出さずに、有理数体 $\mathbf{Q}$ 上有限次元のベクトル空間とそれらの間の線形写像で、証明も含めてすべてを記述していることである。一方、これは有限集合である扇を空間と考えて、その上で層の理論を展開しているともいえる。

1　扇上の外積加群

r を非負整数、N を階数 r の自由 $\mathbf{Z}$ 加群とする。また A を $\mathbf{Q}$ 上の外積代数 $\bigwedge^\bullet N_{\mathbf{Q}}$ とし、その次数付けを $A_i := \bigwedge^{-i} N_{\mathbf{Q}}$ により定める。

C を A の斉次部分 $\mathbf{Q}$ 代数とするとき $\mathrm{GM}(C)$ により次数付き有限生成左 C 加群全体で、写像としては次数を保つ斉次 C 準同型のみを考えたアーベル圏を表す。次数付き左 C 加群 V は斉次元 $a \in A_p, x \in V_q$ に対し $xa := (-1)^{pq}ax$ と定めることにより右 C 加群とも考える。逆に、右 C 加群の構造から左 C 加群の構造も得られる。

$\mathrm{GM}(C)$ での有限複体全体のなすアーベル圏を $\mathrm{CGM}(C)$ とする。なお $\mathrm{CGM}(C)$ での準同型はホモトピー同値等による同一視は行なわずにすべて区別して考える。一般に X がカテゴリー $\mathcal{C}$ の対象であることを $X \in \mathcal{C}$ と書くことにする。

$V^\bullet \in \mathrm{CGM}(C)$ に対して各コホモロジー群 $\mathrm{H}^i(V^\bullet)$ は次数付き C 加群である。$\mathrm{CGM}(C)$ での準同型 $f : V^\bullet \to W^\bullet$ が各コホモロジー群の同型を引き起こすとき f を擬同型という。

有理錐体 $\sigma \subset N_{\mathbf{R}}$ に対して $r_\sigma := \dim \sigma$ と置く。このとき $N(\sigma) := N \cap (\sigma + (-\sigma))$ は階数 r_σ の自由 $\mathbf{Z}$ 加群である。$A(\sigma)$ を A の部分代数 $\bigwedge^\bullet N(\sigma)_{\mathbf{Q}}$ とする。

$\sigma \prec \tau$ のとき $A(\sigma) \subset A(\tau)$ である。$V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対し $V_{A(\tau)} := V \otimes_{A(\sigma)} A(\tau)$ と置く。$A(\tau)$ が階数 $2^{r_\tau - r_\sigma}$ の自由 $A(\sigma)$ 加群であることから、この対応 $V \mapsto V_{A(\tau)}$ は $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ から $\mathrm{GM}(A(\tau))$ への完全関手である。

$\det(\sigma) := \bigwedge^{r_\sigma} N(\sigma)_{\mathbf{Q}}$ として $\det(\sigma)(r_\sigma)$ で次数が $-r_\sigma$ の成分が $\det(\sigma)$ で他の成分が $\{0\}$ である次数付きベクトル空間とする。

$V \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ に対し $\mathrm{D}_\sigma(V) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(V, \det(\sigma)(r_\sigma))$ と定義する。V の次数付き左加群の構造から $\mathrm{D}_\sigma(V)$ は次数付き右加群となり、それにより $\mathrm{D}_\sigma(V) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ と考える。D_σ は $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ からそれ自身への反変完全関手となる。$\sigma \prec \tau$ のとき $\mathrm{D}_\sigma(V)_{A(\tau)} = \mathrm{D}_\tau(V_{A(\tau)})$ となる。

また、$\det(\sigma)^2 := \det(\sigma) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\sigma)$ とし $\det(\sigma)^2(r_\sigma)[-r_\sigma]^\bullet$ により $F^{r_\sigma}_{-r_\sigma}$ だけが $\det(\sigma)^2$ で、その他の (i,j) については $F^i_j = \{0\}$ であるような次数付き $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の複体 $F^\bullet$ を表す。

$V^\bullet \in \mathrm{CGM}(A(\sigma))$ に対し

$$\mathbf{D}_\sigma(V)^\bullet := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}(V, \det(\sigma)^2(r_\sigma)[-r_\sigma])^\bullet$$

と定義する。この時 $\mathbf{D}_\sigma$ は $\mathrm{CGM}(A(\sigma))$ からそれ自身への反変完全関手となる。また、コホモロジー群について $\mathrm{H}^i(\mathbf{D}_\sigma(V)^\bullet) \simeq \mathrm{D}_\sigma(\mathrm{H}^{r_\sigma - i}(V^\bullet))$ が成り立つ。

なお $r_\pi = r$ のとき $A(\pi) = A$ で $\mathbf{D}_\pi : \mathrm{CGM}(A) \to \mathrm{CGM}(A)$ は π の選び方によらない。π を特定しないとき、この関手を $\mathbf{D}_N$ と書く。

Δ を $N_{\mathbf{R}}$ の有限扇とする。各 $\sigma \in \Delta$ についてのアーベル圏 $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ を合併したものとして、次の加法圏 $\mathrm{GEM}(\Delta)$ を考える。

$\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象は $L(\sigma) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ の集まり $L = (L(\sigma)\ ;\ \sigma \in \Delta)$ で準同型 $f : L \to K$ は $\sigma \prec \tau$ なるすべての $\sigma, \tau \in \Delta$ についての $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ での準同

型 $f(\sigma/\tau): L(\sigma) \to K(\tau)$ の集まり $f = (f(\sigma/\tau))$ として定義する。但し、ここで $K(\tau)$ は包含関係 $A(\sigma) \subset A(\tau)$ により $K(\tau) \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ と考えている。$\sigma \neq \tau$ のとき常に $f(\sigma/\tau) = 0$ であるとき f を非混合という。非混合な準同型には核や余核が $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象として存在する。

$\mathrm{GEM}(\Delta)$ の対象を Δ 上の外積加群と呼ぶ。外積加群の直和や準同型の結合は自然に定義される。また、各 $\mathrm{GM}(A(\sigma))$ は自然に $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の部分圏と考えられ、この意味で $L = (L(\sigma)\,;\sigma \in \Delta) \in \mathrm{GEM}(\Delta)$ は外積加群の直和 $\bigoplus_{\sigma\in\Delta} L(\sigma)$ に等しい。

各 $\rho \in \Delta$ に対して共変関手 $\mathrm{i}_\rho^* : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A(\rho))$ 及び $\mathrm{i}_\rho^! : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A(\rho))$ を次のように定義する。

$L \in \mathrm{GEM}(\Delta)$ に対し

$$\mathrm{i}_\rho^*(L) := \bigoplus_{\sigma\in F(\rho)} L(\sigma)_{A(\rho)}$$

と定める。ここで $F(\rho)$ は ρ 自身も含めた ρ の面全体で、また $L(\sigma)_{A(\rho)} := L(\sigma)\otimes_{A(\sigma)} A(\rho)$ である。

$f: L \to K$ に対して $\mathrm{i}_\rho^*(f) : \mathrm{i}_\rho^*(L) \to \mathrm{i}_\rho^*(K)$ は、$\sigma \prec \tau$ なる $\sigma, \tau \in F(\rho)$ に対する (σ, τ) 成分を $f(\sigma/\tau)$ から引き起こされた準同型と定める。

一方、$\mathrm{i}_\rho^!$ の方は単に $\mathrm{i}_\rho^!(L) := L(\rho)$ と定義し $f: L \to K$ に対し $\mathrm{i}_\rho^!(f) := f(\rho/\rho)$ とする。

また、i_ρ^* と類似の関手 $\Gamma : \mathrm{GEM}(\Delta) \to \mathrm{GM}(A)$ を

$$\Gamma(L) := \bigoplus_{\sigma\in\Delta} L(\sigma)_A$$

で定義する。

$L^\bullet$ を $\mathrm{GEM}(\Delta)$ の有限複体とすると、$\rho \in \Delta$ に対する $\mathrm{i}_\rho^* L^\bullet$ は $\mathrm{GM}(A(\rho))$ の複体で $\Gamma(L)^\bullet$ は $\mathrm{GM}(A)$ の複体である。$\mathrm{GEM}(\Delta)$ での有限複体のなす加法圏を $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ と書く。

$f: L^\bullet \to K^\bullet$ を $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ での準同型とする。すべての $\rho \in \Delta$ に対して、アーベル圏 $\mathrm{GM}(A(\rho))$ での複体の準同型 $\mathrm{i}_\rho^!(f) : L(\rho)^\bullet \to K(\rho)^\bullet$ が擬同型であるときに f を擬同型と呼ぶ。

$f: L^\bullet \to K^\bullet$ が擬同型であれば$\Gamma(f) : \Gamma(L)^\bullet \to \Gamma(K)^\bullet$ はアーベル圏 $\mathrm{GM}(A)$ での複体の擬同型となる。また、任意の $\rho \in \Delta$ に対し $\mathrm{GM}(A(\rho))$ での複体の準同型 $\mathrm{i}_\rho^* : \mathrm{i}_\rho^* L \to \mathrm{i}_\rho^* K$ も擬同型となる。

また、$L^\bullet, K^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に $J^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ と 2 つの擬同型 $L^\bullet \to J^\bullet$ 及び $K^\bullet \to J^\bullet$ が存在するとき $L^\bullet$ と $K^\bullet$ は擬同型であるという。

2 外積加群の複体としての交叉複体

写像 $\mathbf{p}:\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}\to\mathbf{Z}$ を Δ の perversity と呼ぶ。

次の条件を満たす $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^{\bullet}\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ が存在する。

(1) $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\mathbf{0})^{0}=\mathbf{Q}$ かつ $i\neq 0$ なら $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\mathbf{0})^{i}=\{0\}$.

(2) $\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ に含まれる任意の σ と $i+j\leq\mathbf{p}(\sigma)$ を満たす任意の $i,j\in\mathbf{Z}$ について $\mathrm{H}^{i}(\mathrm{i}_{\sigma}^{!}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^{\bullet})_{j}=\{0\}$ となる。

(3) $\Delta\setminus\{\mathbf{0}\}$ に含まれる任意の σ と $i+j\geq\mathbf{p}(\sigma)$ を満たす任意の $i,j\in\mathbf{Z}$ について $\mathrm{H}^{i}(\mathrm{i}_{\sigma}^{*}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^{\bullet})_{j}=\{0\}$ となる。

複体 $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^{\bullet}$ は次のように帰納的に構成される。

$\Delta=\{\mathbf{0}\}$ であれば (1) で確定するので $\Delta\neq\{\mathbf{0}\}$ とする。$\pi\in\Delta$ を極大元の一つとして、複体 $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta\setminus\{\pi\})^{\bullet}$ はすでに得られているとする。これを Δ に延長すればよいが $V^{\bullet}:=\mathrm{i}_{\pi}^{*}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta\setminus\{\pi\}))^{\bullet}$ と置き、$V[-1]^{\bullet}$ を (2) の条件を満たすように次数ごとに段階的に切断した複体を $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)(\pi)^{\bullet}$ と定義して $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^{\bullet}$ が得られる (cf.[I3, Thm.2.9])。

このように構成された複体を Δ の pervesity $\mathbf{p}$ の交叉複体と呼ぶ。$\mathbf{p}$ が恒等的に 0 のとき、これを middle perversity といい、この複体を単に $\mathrm{ic}(\Delta)^{\bullet}$ と書く。

なお、これら3つの条件を満たす複体は一意的ではないが、どれも互いに擬同型である。

Theorem 2.1 (既約性定理) $\mathbf{p}$ を任意の *perversity* とし $f:L^{\bullet}\to K^{\bullet}$ を共に $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^{\bullet}$ に擬同型な $L^{\bullet},K^{\bullet}\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ の準同型とする。もし $f(\mathbf{0}/\mathbf{0}):L(\mathbf{0})^{\bullet}\to K(\mathbf{0})^{\bullet}$ が擬同型であれば f は擬同型である。

任意の $\mathbf{p}$ について $\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^{\bullet}$ は $\mathrm{CGM}(A)$ の対象であるが $0\leq i\leq r,-r\leq j\leq 0$ 以外の i,j については $\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))_{j}^{i}=\{0\}$ である。従って、この範囲にない i,j については $\mathrm{H}^{i}(\Gamma(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^{\bullet})_{j}=\{0\}$ である。

任意の $\sigma\neq\mathbf{0}$ に対し $\mathbf{t}(\sigma):=r_{\sigma}-1$ で定義される perversity $\mathbf{t}$ を top perversity と呼び、$\mathbf{b}:=-\mathbf{t}$ を bottom perversity と呼ぶ。

(2.2) Δ が単体的扇であれば $\mathbf{b}\leq\mathbf{p}\leq\mathbf{t}$ なる任意の $\mathbf{p}$ について $\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^{\bullet}$ は $\mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta)^{\bullet}$ と擬同型である。

$L^{\bullet}\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ が任意の $i\in\mathbf{Z}$ と $r_{\tau}-r_{\sigma}\geq 2$ となる $\sigma\prec\tau$ について $d_{L}^{i}(\sigma/\tau)=0$ であるとき浅い対象と呼ぶ。

浅い対象 $L^{\bullet}\in\mathrm{CGEM}(\Delta)$ を定義するためには次のようにすればよい。

(1) 各 $\sigma\in\Delta$ に対して $L(\sigma)^{\bullet}\in\mathrm{CGM}(A(\sigma))$ をとる。

(2) $r_{\tau}-r_{\sigma}=1$ となるすべての $\sigma\prec\tau$ について複体の準同型 $d_{L}(\sigma/\tau):L(\sigma)^{\bullet}\to L(\tau)[1]^{\bullet}$ を定める。

(3) $r_\rho - r_\sigma = 2$ となる $\sigma \prec \rho$ に対しては$\sigma \prec \tau \prec \rho$ となる τ は丁度2つであるが、それらを τ_1, τ_2 とするとき常に

$$d(\tau_1/\rho) \cdot d(\sigma/\tau_1) + d(\tau_2/\rho) \cdot d(\sigma/\tau_2) = 0$$

となっていることを確認する。

浅い対象 $\mathrm{P}(\Delta)^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ を定義する。各 $\sigma \in \Delta$ について$\mathrm{P}(\Delta)(\sigma)^\bullet := A(\sigma) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\sigma)[-r_\sigma]^\bullet$ とし $r_\tau - r_\sigma = 1$ なる $\sigma \prec \tau$ について

$$d_{\mathrm{P}(L)}(\sigma/\tau) : \mathrm{P}(\Delta)(\sigma)^\bullet \to \mathrm{P}(\Delta)(\tau)[1]^\bullet$$

は包含写像 $A(\sigma) \to A(\tau)$ と結合係数写像 $\det(\sigma) \to \det(\tau)$ のテンソル積として定義する。

自然な非混合全射 $\mathrm{P}(\Delta)^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta)^\bullet$ が存在する。この全射の核を $K^\bullet$ と置くと $K(\sigma)^\bullet := (N(\sigma)A(\sigma)) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\sigma)[-r_\sigma]^\bullet$ となる。但し $N(\sigma)A(\sigma)$ は $A(\sigma)$ の極大両側イデアル$\bigoplus_{i=-r_\sigma}^{-1} A(\sigma)_i$ である。

$f : \Delta' \to \Delta$ を扇の細分とする。つまり Δ' は同じ $N_{\mathbf{R}}$ の有限扇で $|\Delta'| = |\Delta|$ であり、各 $\sigma \in \Delta'$ は、ある錐体 $\tau \in \Delta$ に含まれるとする。なお、$\sigma \in \Delta'$ に対し $f(\sigma)$ は Δ の中で σ を含む最小の錐体を表すものとする。$L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta')$ に対し、順像 $f_*L^\bullet$ を次のように定義する。

$i \in \mathbf{Z}$ と $\rho \in \Delta$ に対して

$$(f_*L)(\rho)^i := \bigoplus_{\sigma \in f^{-1}(\rho)} L(\sigma)^i_{A(\rho)}$$

と定義して $\rho \prec \mu$ なる $\rho, \mu \in \Delta$ と$\sigma \prec \tau$ となる $\sigma \in f^{-1}(\rho)$ と$\tau \in f^{-1}(\mu)$ に対する $d^i_{f_*L}(\rho/\mu)$ の (σ, τ) 成分は $d^i_L(\sigma/\tau)$ から得られるものとする。

(2.3) $h : L^\bullet \to K^\bullet$ が $\mathrm{CGEM}(\Delta')$ での擬同型とすると $f_*h : f_*L^\bullet \to f_*K^\bullet$ も擬同型となる。

$\sigma \in \Delta'$ と $\tau := f(\sigma) \in \Delta$ に対し、写像

$$A(\sigma) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\sigma)[-r_\sigma]^\bullet \to A(\tau) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\tau)[-r_\tau]^\bullet$$

を $r_\sigma < r_\tau$ であれば零で $r_\sigma = r_\tau$ であれば $A(\sigma) = A(\tau)$ かつ $\det(\sigma) = \det(\tau)$ なので恒等写像と定めると非混合全射擬同型 $f_*\,\mathrm{P}(\Delta')^\bullet \to \mathrm{P}(\Delta)^\bullet$ が得られる。また、これと可換な非混合準同型 $f_*\,\mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta')^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(\Delta)^\bullet$ が存在する。

$f : \Sigma \to \Delta$ をある重心細分とする。Σ の選び方にかかわらず $f_*\,\mathrm{P}(\Sigma)^\bullet$ はある $\mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ と同型となる。任意の perversity $\mathbf{p}$ に対し自然な非混合全射 $\mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ が存在する。

3 双対化作用素

$L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ の浅い対象 $\mathbf{D}(L)^\bullet$ を次のように定義する。

各 $\rho \in \Delta$ に対し $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet := \mathbf{D}_\rho(\mathrm{i}_\rho^*(L))^\bullet$ と置く。$\rho, \mu \in \Delta$ が $\rho \prec \mu$ であるとする。$r_\mu - r_\rho = 1$ のとき

$$\mathbf{D}_\rho(\mathrm{i}_\rho^* L)^\bullet_{A(\mu)} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}}((\mathrm{i}_\rho^* L)_{A(\mu)}, \det(\mu) \otimes_{\mathbf{Q}} \det(\rho)(r_\mu)[-r_\mu + 1])^\bullet$$

であるから、自然な全射 $\mathrm{i}_\mu^*(L)^\bullet \to \mathrm{i}_\rho^*(L)^\bullet_{A(\mu)}$、及び結合係数写像 $\det(\rho) \to \det(\mu)$ により複体の準同型 $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet_{A(\mu)} \to \mathbf{D}(L)(\mu)[1]^\bullet$ を得る。

$\rho \prec \mu$ かつ $r_\mu - r_\rho = 1$ となるような$\rho, \mu \in \Delta$ に対し

$$d_{\mathbf{D}(L)}(\rho/\mu) : \mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet \longrightarrow \mathbf{D}(L)(\mu)[1]^\bullet$$

は、単射 $\mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet \to \mathbf{D}(L)(\rho)^\bullet_{A(\mu)}$ に上記の準同型を合成したものと定める。

この反変関手 $\mathbf{D}$ の重要な性質を列挙する。

(3.1) $f : L^\bullet \to K^\bullet$ が $\mathrm{CGEM}(\Delta)$ での擬同型とすると $\mathbf{D}(f) : \mathbf{D}(K)^\bullet \to \mathbf{D}(L)^\bullet$ も擬同型である。

(3.2) 任意の $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し、自然な擬同型$\varphi : L^\bullet \to \mathbf{D}(\mathbf{D}(L))^\bullet$ が存在する。

(3.3) Δ が完備であれば、任意の $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し$\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet$ と $\mathbf{D}_N(\Gamma(L))^\bullet$ は擬同型である。特に

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet)_j = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^{r-i}(L^\bullet)_{-r-j}$$

が成立する。

(3.4) $|\Delta|$ が r 次元の凸多角錐の境界に等しければ $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対し $\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet$ と $\mathbf{D}_N(\Gamma(L))[1]^\bullet$ は擬同型である。特に

$$\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathbf{D}(L))^\bullet)_j = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^{r-i-1}(L^\bullet)_{-r-j}$$

が成立する。

(3.5) Δ を任意の有限扇とし $\mathbf{p}$ を perversity とすると $\mathbf{D}(\mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{ic}_{-\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$ と擬同型である。特に、$\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ と擬同型である。

(3.6) $f : \Delta' \to \Delta$ を有限扇の細分とする。任意の $L^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ に対して $f_*\mathbf{D}(L)^\bullet$ と $\mathbf{D}(f_*L)^\bullet$ は擬同型となる。

4 分解定理と対角線定理

$f : \Sigma \to \Delta$ を重心細分とし $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ をそれぞれ Δ 及び Σ の perversity とする。自然な非混合全射擬同型

$$f_* \mathrm{SdP}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{SdP}(\Delta)^\bullet$$

から非混合準同型

$$f_* \mathrm{ic}_{\mathbf{q}}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{ic}_{\mathbf{p}}(\Delta)^\bullet$$

が引き起こされるための必要十分条件は $\forall\sigma \in \Sigma \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対し $\mathbf{q}(\sigma) \leq \mathbf{p}(f(\sigma))$ となることである。特に

$$f_* \mathrm{ic}(\Sigma)^\bullet \to \mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$$

は存在する。

この準同型に反変関手 $\mathbf{D}$ を使って

$$\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet \to \mathbf{D}(f_* \mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet$$

を得るが $\mathbf{D}(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は (3.5) により $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ に擬同型で $\mathbf{D}(f_* \mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet$ は (3.6) と (3.5) により $f_* \mathrm{ic}(\Sigma)^\bullet$ に擬同型である。従って、これらはある意味で互いに逆向きの準同型である。このことと $\mathrm{ic}(\Delta)^\bullet$ の既約性 (定理 2.1) から次の重要な定理を得る。

Theorem 4.1 (分解定理) Δ を有限扇 $f : \Sigma \to \Delta$ を重心細分とすると

$$\Gamma(\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet \to \Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$$

による A 加群の準同型

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Sigma))^\bullet) \to \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)$$

はすべての i について分裂する全射である。

完備な単体的扇に対する定理 [O2, Prop.4.1] の一般化として次の定理を得る。これは分解定理と (2.2) により単体的扇の定理に帰着することにより証明する。

Theorem 4.2 (対角線定理 I) Δ を完備扇とすると $i \neq j + r$ であれば

$$\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$$

となる。

さらに重心細分をうまく使って次の定理を得る。

Theorem 4.3 (対角線定理 II) π を r 次元の錐体とする。$i+j \geq 0$ かつ $i \neq j+r-1$ であるか $i+j \leq -1$ かつ $i \neq j+r$ であれば $\mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(F(\pi)\backslash\{\pi\}))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

この定理で $F(\pi)\backslash\{\pi\}$ が単体的扇である場合は $\mathrm{ic}(F(\pi)\backslash\{\pi\})^\bullet$ は $\mathrm{ic}_{\mathbf{t}}(F(\pi)\backslash\{\pi\})^\bullet$ と擬同型であることから [O3, Cor.4.5] に与えられた g 予想を証明するための同値な条件に等しいことがわかる。

スタンレーによる g 予想の証明はこの同値な条件が代数幾何学の定理である強レフシェッツ定理の系であることに基づいているが、上の対角線定理 II により代数多様体の議論を経ずに直接証明されたことになる。

Corollary 4.4 ρ を有限扇 Δ の元とすると $i+j \geq 0$ かつ $i \neq j+r_\rho-1$ であるか $i+j \leq -1$ かつ $i \neq j+r_\rho$ であれば $\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\}))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

これは ρ を $N(\rho)_{\mathbf{R}}$ の最大次元の錐体とみて定理 4.3を適用すればよい。

Corollary 4.5 ρ を有限扇 Δ の元とすると $i+j \geq 1$, $i = j+r_\rho$ でなければ $\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\rho^!(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ であり、$i+j \leq -1$, $i = j+r_\rho$ でなければ $\mathrm{H}^i(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j = \{0\}$ となる。

これは $\mathrm{i}_\rho^!(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{gt}^{\geq 1}(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\}))[-1])^\bullet$ に $\mathrm{CGM}(A(\rho))$ の中で同型で、$\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet$ は $\mathrm{gt}_{\leq -1}(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\backslash\{\rho\})))^\bullet$ に擬同型であるので系 4.4から得られる。

なお、$\mathrm{gt}^{\geq 1}$ や $\mathrm{gt}_{\leq -1}$ は次数つき加群の複体の切断で詳しくは [I3, §1] を見て下さい。

5　スタンレーによる一般化された h ベクトルとの関係

$V^\bullet$ を有限次元次数つき $\mathbf{Q}$ ベクトル空間の有限複体とする。各 $j \in \mathbf{Z}$ に対し $\chi(V_j) := \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^{i+j}\dim_{\mathbf{Q}} V_j^i$ とし、整係数のローラン多項式 $\chi(V,t)$ を

$$\chi(V,t) := \sum_{j\in\mathbf{Z}} \chi(V_j)t^{-j}$$

と定義する。$\chi(V_j) = \sum_{i\in\mathbf{Z}}(-1)^{i+j}\dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(V^\bullet)_j$ なので $\chi(V,t)$ は $V^\bullet$ コホモロジー群できまる。$V(1)^\bullet$ を $V(1)_j^i := V_{j+1}^i$ で定義される複体、つまり次数つきベクトル空間の次数を 1 ずつ下げた複体とすると $\chi(V(1),t) = -t\chi(V,t)$ となる。また $V[1]^\bullet$ を $V[1]^i := V^{i+1}$ かつ $d_{V[1]}^i := -d_V^{i+1}$ で定義された複体とすると $\chi(V[1],t) = -\chi(V,t)$ となる

$N_{\mathbf{R}}$ の錐体 σ, τ が $\sigma \prec \tau$ かつ $r_\tau - r_\sigma = 1$ であれば、次数つき $A(\sigma)$ 加群として $A(\tau) \simeq A(\sigma) \oplus A(\sigma)(1)$ である。$V^\bullet \in \mathrm{GM}(A(\sigma))$ であれば $V^\bullet_{A(\tau)} \simeq V^\bullet \oplus V^\bullet(1)$ であるから $\chi(V_{A(\tau)}, t) = (1-t)\chi(V, t)$ となる。$r_\tau - r_\sigma > 1$ の場合もこれを繰り返せば $\chi(V_{A(\tau)}, t) = (1-t)^{r_\tau - r_\sigma}\chi(V, t)$ を得る。

Δ を有限扇とし $L \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ とする。各 $\rho \in \Delta$ に対し

$$\begin{aligned} &\chi(\mathrm{i}_\rho^*(L), t) \\ &= \sum_{\sigma \in F(\rho)} \chi(L(\sigma)_{A(\rho)}, t) \\ &= \sum_{\sigma \in F(\rho)} (1-t)^{r_\rho - r_\sigma}\chi(L(\sigma), t) \end{aligned}$$

となる。また $L^\bullet, K^\bullet \in \mathrm{CGEM}(\Delta)$ が擬同型であれば各 $\rho \in \Delta$ に対し $\chi(\mathrm{i}_\rho^*(L), t) = \chi(\mathrm{i}_\rho^*(K), t)$ である。

Δ を $N_{\mathbf{R}}$ の完備扇とする。Δ の元全部を面とする仮想の錐体 α_Δ を考え $\tilde{\Delta} := \Delta \cup \{\alpha_\Delta\}$ と置く。$\tilde{\Delta}$ は順序関係 $\sigma \prec \tau$ によりオイラー(半)順序集合 [S2, §2] となる。各 $\rho \in \tilde{\Delta}$ に対し $F[\mathbf{0}, \rho) := F(\rho) \setminus \{\rho\}$ と置く。

[S2, §2] においてスタンレーがオイラー順序集合に対して定義した多項式 f, g を $\tilde{\Delta}$ について求めると、各 $\rho \in \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$ に対して

$$f(F[\mathbf{0}, \rho), t) = (-1)^{r_\rho}(t-1)^{-1}\chi(\mathrm{i}_\rho^*(\mathrm{ic}(F(\rho)\setminus\{\rho\})), t)$$

及び

$$g(F[\mathbf{0}, \rho), t) = (-1)^{r_\rho}\chi(\mathrm{ic}(\Delta)(\rho), t)$$

となる。

これは [S2, §2] にある帰納的な定義の条件である

$$f(F[\mathbf{0}, \rho), t) = \sum_{\sigma \in F(\rho)} (t-1)^{r_\rho - r_\sigma - 1} g(F[\mathbf{0}, \sigma), t)$$

及び $g(F[\mathbf{0}, \rho), t)$ が $(t-1)f(F[\mathbf{0}, \rho), t)$ の次数 $r_\rho/2$ 以下の部分に等しいことみればよいが、前者は前に書いたことから容易に得られ、後者は系 4.4 から得られる。

結局、$\sum h_{r-i}t^i := f(F[\mathbf{0}, \alpha_\Delta), t)$ で定義される h ベクトル $(h_0, \cdots, h_r)$ は各 $0 \leq i \leq r$ に対し $h_i = \dim_{\mathbf{Q}} \mathrm{H}^i(\Gamma(\mathrm{ic}(\Delta))^\bullet)_j$ となる。

参考文献

[BBD] A.A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux pervers, Analyse et Topologie sur les Espaces Singuliers (I), Astérisque **100**, Soc. Math. France, 1982.

[DL] J. Denef and F. Loeser, Weights of exponential sums, intersection cohomology, and Newton polyhedra, preprint.

[GM2] M. Goresky and R. MacPherson, Intersection homology II, Invent. math. **72**, (1983), 77-129.

[I1] M.-N. Ishida, Torus embeddings and dualizing complexes, Tohoku Math. J. **32**, (1980), 111-146.

[I2] M.-N. Ishida, Torus embeddings and de Rham complexes, in Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H. Matsumura, ed.), Adv. Studies in Pure Math. **11**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 111-145.

[I3] M.-N. Ishida, Torus embeddings and algebraic intersection complexes, preprint.

[I4] M.-N. Ishida, Torus embeddings and algebraic intersection complexes II, in preparation.

[O1] T. Oda, Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to the Theory of Toric Varieties, Ergebnisse der Math. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1988.

[O2] T. Oda, The algebraic de Rham theorem for toric varieties, Tohoku Math. J. **45**, (1993), 231-247.

[O3] T. Oda, Simple convex polytopes and the strong Lefschetz theorem, J. of Pure and Appl. Alg. **71**, (1991), 265-286.

[O4] The intersection cohomology and toric varieties, these proceedings.

[S1] R. Stanley, The number of faces of a simplicial convex polytope, Adv. in Math. **35**, (1980), 236-238.

[S2] R. Stanley, Generalized h-vectors, intesection cohomology of toric varieties, and related results, in Commutative Algebra and Combinatorics (M. Nagata and H. Matsumura, ed.), Adv. Studies in Pure Math. **11**, Kinokuniya, Tokyo and North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1987, 187-213.